Schrodinger representations of Drinfel'd doubles of Hopf algebras from the viewpoint of tensor Morita invariants (Hopf algebras and quantum groups : their possible applications)

和久井, 道久

数理解析研究所講究録
第1840巻 2013年 89-108

Schrödinger representations of Drinfel'd doubles of Hopf algebras from the viewpoint of tensor Morita invariants

関西大学システム理工学部　和久井道久 (Michihisa Wakui)

絡み目の量子不変量は、Hopf 代数 H とその普遍 R 行列 $R \in H \otimes H$ および H の表現 V を固定し、各絡み目図式にそれらを決められたルールに従って配置し、ある種のトレースをとることにより定義される [28]。うまく H や R, V を選ぶことで、Jones 多項式のような強力な不変量が生み出されることはよく知られている。そうであれば、逆に、絡み目を固定して、量子不変量を Hopf 代数の不変量とみなすことで Hopf 代数の有力な不変量が得られないだろうか。[37] において導入された多項式不変量はその観点から導入された Hopf 代数の不変量の 1 つである。この不変量は、同型な表現環を持つが、表現圏がモノイダル圏として異なる２つの Hopf 代数を区別することのできる有用な不変量である。しかしながら、半単純かつ余半単純な Hopf 代数に対してしか定義されないこと、普遍 R 行列が存在しないものに対しては無力であること、計算するためにすべての普遍 R 行列とすべての (絶対) 既約な表現を求めなければならないこと、などの問題点を抱えている。

これらの問題点を解決するための 1 つの方法は、Hopf 代数 H の Drinfel'd の二重化 $D(H)$ [7] を考えることである。Drinfel'd の二重化 $D(H)$ には標準的な普遍 R 行列 $\mathcal{R}$ が存在する。さらに、既約表現の代わりに正則表現を使えば、半単純かつ余半単純という条件を Hopf 代数に課す必要はなく、扱う表現も 1 つで済む。清水健一氏 [31] は Reshetikin と Turaev の方法 [28] で定義される、n 糸からなる組み紐群 B_n の表現 $\rho_{D(H)} : B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(D(H)^{\otimes n})$ の指標を Hopf 代数 H の不変量とみなすと、それがモノイダル森田同値不変量になっていることを示し、H が群 Hopf 代数の場合にこの不変量を詳しく解析している。

この論文では、$D(H)$ の Schrödinger 表現 [17] に焦点を当てる。この表現は H における随伴作用 (群の言葉で言えば共役作用に相当) を延長することによって定義され、H を表現空間に持つ。正則表現では H とその双対 Hopf 代数 H^* の差を捉えるることができないが [31]、Schrödinger 表現ではそれらを区別できるときがある (系 4.10)。さらに興味深いことに、Schrödinger 表現 ${}_{D(H)}H$ はモノイダル森田同値不変量になっている (定理 1.2)。これが本論文の主結果であり、Schrödinger 表現が Radford の誘導関手 [26] による単位表現 ε の像であるという事実 (補題 3.4) から導かれる。主結果から、Reshetikin と Turaev の方法で構成される組み紐群 B_n の表現 $\rho_{{}_{D(H)}H} : B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(({}_{D(H)}H)^{\otimes n})$ の指標をとることにより、Hopf 代数のモノイダル森田同値不変量が大量に構成される (定理 4.3)。論文の最後では、閉包が $(2, q)$-トーラス絡み目になる組み紐に対し、中でも Hopf 絡み目になるものに対して不変量の計算公式や計算例を紹介する。

以下の記号を用いる。体 $\boldsymbol{k}$ 上の Hopf 代数 H の単位元、余積、余単位元、対合をそれぞれ $1_H, \Delta_H, \varepsilon_H, S_H$ で表わす。考えている Hopf 代数が H であることがはっきりしているときには、添え字の H を略す。また、$\Delta_H(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ のような Sweedler の記法を用いる。テンソル積 $\otimes$ はすべて $\boldsymbol{k}$ 上でとる。左 H-加群を対象とし、それらの間の左 H-加群準同型を射

とする圏を ${}_H\mathbf{M}$ で表わし、対象を有限次元左 H-加群に制限することにより得られる充満部分圏を ${}_H\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}$ で表わす。${}_H\mathbf{M}$ は k-線形モノイダル圏をなし、${}_H\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}$ は k-線形左剛的モノイダル圏をなす。右 H-余加群を対象とし、それらの間の右 H-余加群準同型を射とする圏を $\mathbf{M}^H$ で表わす。$\mathbf{M}^H$ も k-線形モノイダル圏をなす。また、圏 $\mathcal{C}$ に対し、$X \in \mathcal{C}$ と書いて X が $\mathcal{C}$ の対象であることを表わす。Hopf 代数の全般的なことは [1,23,35] を、モノイダル圏に関しては [12,16] を参照されたい。

謝辞. この論文は、2010 年 10 月に Schneider 先生来日を記念して筑波大学で開かれた研究集会『ホップ代数と量子群』において、筆者が発表した予想が肯定的に解決したことの報告です。その研究集会の講演直後、筑波大学の増岡彰先生から有力なアイデアと文献を教えていただき、それに基づき考察したところ、上記の予想を証明することができました。増岡先生に感謝申し上げます。また、この記事の初期版の誤りを指摘し、有益な助言を与えてくださった清水健一氏に感謝申し上げます。本研究はまた文部科学省の科研費 (22540058) の助成を受けています。

§1. Schrödinger 加群とそのモノイダル森田同値不変性

Drinfel'd 二重化 Hopf 代数の定義を思い出そう [7], [12; IX.4], [20; Section 7.1]。

H を体 k 上の有限次元 Hopf 代数とし、H^* をその双対 Hopf 代数とする。**Drinfel'd の二重化** Hopf 代数 $D(H)$ とは、ベクトル空間 $D(H) = H^{*\mathrm{cop}} \otimes H$ 上に定義される k 上の Hopf 代数であり、その Hopf 代数構造が以下のように与えられるものをいう。但し、$p \in H^*$ と $h \in H$ に対して $p \otimes h$ を $D(H)$ の元としてみるときには $p \bowtie h$ という記号を用いる：$p \bowtie h = p \otimes h$.

積　$(p \bowtie h) \cdot (p' \bowtie h') = \sum p(h_{(1)} \rightharpoonup p'_{(2)}) \bowtie (h_{(2)} \leftharpoonup p'_{(1)})h'$

単位元　$1_{D(H)} = \varepsilon \bowtie 1_H$

余積　$\Delta(p \bowtie h) = \sum (p_{(2)} \bowtie h_{(1)}) \otimes (p_{(1)} \bowtie h_{(2)})$

余単位元　$\varepsilon_{D(H)}(p \bowtie h) = p(1)\varepsilon(h)$

対合　$S_{D(H)}(p \bowtie h) = (\varepsilon \bowtie S(h)) \cdot (S_{H^*}^{-1}(p) \bowtie 1_H)$

ここで、$\Delta_{H^*}(p) = \sum p_{(1)} \otimes p_{(2)}$ であり、$h \in H$ と $p \in H^*$ に対して $h \rightharpoonup p$ と $h \leftharpoonup p$ は

$$\langle h \rightharpoonup p,\ x\rangle = \sum \langle p,\ S^{-1}(h_{(2)})xh_{(1)}\rangle \qquad (x \in H),$$
$$h \leftharpoonup p = \sum \langle p_{(1)},\ S^{-1}(h_{(3)})\rangle\langle p_{(2)},\ h_{(1)}\rangle h_{(2)}$$

により与えられる。$\rightharpoonup$ により、H^* は左 H-加群になり、$\leftharpoonup$ により H は右 H^*-加群となる。

注意 1.1 積と対合は具体的に次式で与えられる ([12; p.214, Lemma IX.4.2], [25; p.299, (14)])：

$$(p \bowtie h) \cdot (p' \bowtie h') = \sum \langle p'_{(1)}, S^{-1}(h_{(3)})\rangle\langle p'_{(3)}, h_{(1)}\rangle pp'_{(2)} \otimes h_{(2)}h',$$
$$S_{D(H)}(p \bowtie h) = \sum \langle p_{(1)}, h_{(3)}\rangle\langle S_{H^*}^{-1}(p_{(3)}), h_{(1)}\rangle S_{H^*}^{-1}(p_{(2)}) \bowtie S_H(h_{(2)}).$$

但し、

$$((\Delta_H \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_H)(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)},$$
$$((\Delta_{H^*} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_{H^*})(p) = \sum p_{(1)} \otimes p_{(2)} \otimes p_{(3)}.$$

Drinfel'd 二重化の積はとりわけ複雑であるが、これを理解するには、$D(H)$ を Hopf 代数のテンソル積 $H^{*\mathrm{cop}} \otimes H$ 上の 2-コサイクル変形として捉えるとわかりやすい [5,6,9]。

$D(H)$ は準三角 Hopf 代数と呼ばれる構造を標準的に持つ [7]。その構造を決定する普遍 R-行列 $\mathcal{R}$ は、$\{e_i\}_{i=1}^d$, $\{e_i^*\}_{i=1}^d$ を H, H^* の互いに双対的な基底とするとき、次で与えられる。

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^{d} (\varepsilon \bowtie e_i) \otimes (e_i^* \bowtie 1_H) \quad \in D(H) \otimes D(H).$$

Drinfel'd の二重化 $D(H)$ 上の Schrödinger 加群の定義を述べよう。Hopf 代数 H 上には様々な作用が定義されるが、ここでは、以下で述べる２つの作用 $\triangleright$ と $\leftharpoonup$ に注目する。$\triangleright$ は

(1.1) $$h \triangleright a = \sum h_{(1)} a S(h_{(2)}) \qquad (a, h \in H)$$

により定義される H の H への左作用である。この作用は H の随伴作用と呼ばれ、H が群 Hopf 代数のときには群の共役作用に相当する。$\leftharpoonup$ は H^* の H への右作用であり、

(1.2) $$a \leftharpoonup p = \sum \langle p, a_{(1)} \rangle a_{(2)} \qquad (a \in H,\ p \in H^*)$$

により定義される。右作用 $\leftharpoonup$ を S を用いて左作用に変更し、さらに、S の代わりに S^{-1} を用いて $H^{*\mathrm{cop}}$ の左作用に変更することにより、$H^{*\mathrm{cop}}$ の H への左作用 $\rightharpoonup$ が

(1.3) $$p \rightharpoonup a = \sum \langle S^{-1}(p), a_{(1)} \rangle a_{(2)} \qquad (a \in H,\ p \in H^*)$$

によって定義される。(1.1) と (1.3) の２つの作用は $D(H)$ の左作用 $\bullet$ を引き起こす：

(1.4) $$(p \bowtie h) \bullet a = \sum \langle S^{-1}(p), (h \triangleright a)_{(1)} \rangle (h \triangleright a)_{(2)}.$$

このように定義される左 $D(H)$-加群 H を ${}_{D(H)}H$ と書き、**Schrödinger 加群**と呼ぶ ([17; Proposition 2.1], [20; p.293, Example 7.1.8], [3; Section 3], [9] 等を参照)。

体 $\boldsymbol{k}$ 上の Hopf 代数 A, B が**モノイダル森田同値**であるとは、$\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏 ${}_A\mathsf{M}$ と ${}_B\mathsf{M}$ が $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏として同値であるときをいう。$F : {}_A\mathsf{M} \longrightarrow {}_B\mathsf{M}$ を $\boldsymbol{k}$-線形な圏同値を与える共変関手とするとき、A, B が $\boldsymbol{k}$ 上有限次元で、$M \in {}_A\mathsf{M}$ が $\boldsymbol{k}$ 上有限次元ならば、$F(M) \in {}_B\mathsf{M}$ も $\boldsymbol{k}$ 上有限次元である。したがって、A, B が $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル森田同値ならば、$\boldsymbol{k}$-線形左剛的モノイダル圏 ${}_A\mathsf{M}^{\mathrm{fd}}$ と ${}_B\mathsf{M}^{\mathrm{fd}}$ は $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏として同値である。

任意のモノイダル圏同値 $(F, \phi, \omega) : {}_A\mathsf{M} \longrightarrow {}_B\mathsf{M}$ は組み紐モノイダル圏同値 $(\tilde{F}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) : {}_{D(A)}\mathsf{M} \longrightarrow {}_{D(B)}\mathsf{M}$ に持ち上げられる、すなわち、次の図式を可換にする組み紐モノイダル圏同値 $(\tilde{F}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) : {}_{D(A)}\mathsf{M} \longrightarrow {}_{D(B)}\mathsf{M}$ が存在する：

(1.5) $$\begin{tikzcd} {}_{D(A)}\mathsf{M} \arrow[r, "(\tilde{F}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega})"] \arrow[d, "R_A"'] & {}_{D(B)}\mathsf{M} \arrow[d, "R_B"] \\ {}_A\mathsf{M} \arrow[r, "(F, \phi, \omega)"] & {}_B\mathsf{M} \end{tikzcd}$$

ここで、R_A は $A \subset D(A)$ の下で左 $D(A)$-加群を左 A-加群とみることを表わすモノイダル共変関手であり、R_B も同様に定義されるモノイダル共変関手である。$\tilde{F}$ の具体的な構成方法は次節で述べる。次が成立する。

定理 1.2 A, B を体 k 上の有限次元 Hopf 代数とし、$(F,\phi,\omega) : {}_A\mathsf{M} \longrightarrow {}_B\mathsf{M}$ をモノイダル圏同値を与えるモノイダル共変関手とする。このとき、Schrödinger 加群は (F,ϕ,ω) の持ち上げ $(\tilde{F},\tilde{\phi},\tilde{\omega}) : {}_{D(A)}\mathsf{M} \longrightarrow {}_{D(B)}\mathsf{M}$ の下で保たれる。すなわち、

$$\tilde{F}({}_{D(A)}A) \cong {}_{D(B)}B \qquad \text{as left } D(B)\text{-modules.}$$

定理 1.2 を証明するには、Schrödinger 加群を圏の言葉で再定義する必要がある。その証明は第 3 節で述べられる。

§2. モノイダル圏の中心と Yetter-Drinfel'd 加群

ここでは、モノイダル圏同値 $(F,\phi,\omega) : {}_A\mathsf{M} \longrightarrow {}_B\mathsf{M}$ から組み紐モノイダル圏同値 $(\tilde{F},\tilde{\phi},\tilde{\omega}) : {}_{D(A)}\mathsf{M} \longrightarrow {}_{D(B)}\mathsf{M}$ を構成する方法を説明する。これは次の 2 つの結果から従う：

❶ モノイダル圏同値を与えるモノイダル共変関手 $(F,\phi,\omega) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ は、組み紐モノイダル圏同値を与える組み紐モノイダル共変関手 $(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega)) : \mathcal{Z}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ に持ち上げられる。

❷ モノイダル圏 ${}_A\mathsf{M}$ の中心 $\mathcal{Z}({}_A\mathsf{M})$ は、組み紐モノイダル圏 ${}_{D(A)}\mathsf{M}$ に組み紐モノイダル圏として同型である。

まず、モノイダル圏の中心の定義を思い出そう。詳しくは、Kassel の本 [12; XIII.4, p.330–337] を参照されたい。モノイダル圏 $\mathcal{V} = (\mathcal{C},\otimes,\mathbf{1},a,r,l)$ の**中心**とは以下のように定義される組み紐モノイダル圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ のことをいう。

(対象) $\mathcal{C}$ の対象 V と、共変関手 $-\otimes \mathrm{id}_V : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ から共変関手 $\mathrm{id}_V \otimes - : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ への自然同値 $c_{-,V}$ との組 $(V, c_{-,V})$ であって次の条件を満たすものが $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ の対象である：任意の $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc}
(X\otimes Y)\otimes V & \xrightarrow{c_{X\otimes Y,V}} & V\otimes(X\otimes Y) \\
{\scriptstyle a_{X,Y,V}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle a_{V,X,V}} \\
X\otimes(Y\otimes V) & & (V\otimes X)\otimes Y \\
{\scriptstyle \mathrm{id}_X\otimes c_{Y,V}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle c_{X,V}\otimes \mathrm{id}_Y} \\
X\otimes(V\otimes Y) & \xrightarrow{a^{-1}_{X,V,Y}} & (X\otimes V)\otimes Y
\end{array}$$

が可換となる。

(射) 対象 $(V, c_{-,V})$ から $(W, c_{-,W})$ への射とは、$\mathcal{C}$ における射 $f : V \longrightarrow W$ であって、$\mathcal{C}$ の任意の対象 X に対して

$$(f\otimes \mathrm{id}_X)\circ c_{X,V} = c_{X,W}\circ(\mathrm{id}_X\otimes f)$$

を満たすものをいう。

(合成) 射の合成は $\mathcal{C}$ における射の合成により定義される。

$\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ の組み紐モノイダル圏の構造は次のように与えられる。

① 単対象は $(\mathbb{1}, l^{-1} \circ r)$ である。

② テンソル積は $(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) := (V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ により定義される。但し、$c_{-,V\otimes W}$ は次のように定義される $\mathcal{C}$ の同型射 $c_{X,V\otimes W} : X \otimes (V \otimes W) \longrightarrow (V \otimes W) \otimes X$ からなる：

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "c_{X,V\otimes W}"] \arrow[d, "a^{-1}_{X,Y,V}"'] & (V \otimes W) \otimes X \\
(X \otimes V) \otimes W \arrow[d, "c_{X,V} \otimes \mathrm{id}_W"'] & V \otimes (W \otimes X) \arrow[u, "a^{-1}_{V,W,X}"'] \\
(V \otimes X) \otimes W \arrow[r, "a_{V,X,W}"] & V \otimes (X \otimes W) \arrow[u, "\mathrm{id}_V \otimes c_{X,W}"']
\end{tikzcd}$$

③ 組み紐構造は次で与えられる：

$$c = \{c_{V,W} : (V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) \longrightarrow (W, c_{-,W}) \otimes (V, c_{-,V})\}_{(V,c_{-,V}),(W,c_{-,W}) \in \mathcal{Z}(\mathcal{V})}.$$

モノイダル圏 $\mathcal{V}$ の中心 $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ から $\mathcal{V}$ へ忘却モノイダル関手 $\Pi : \mathcal{Z}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$ が定義される。このモノイダル関手 Π は次の意味で普遍的である：$\mathcal{V} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, r, l)$, $\mathcal{V}' = (\mathcal{C}', \otimes, \mathbb{1}', a', r', l')$ を 2 つのモノイダル圏とし、c を $\mathcal{V}$ の組み紐構造とする。モノイダル共変関手 $(F, \phi, \omega) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ が 2 条件

(i) **充満** (full) である、すなわち、任意の対象 $X, Y \in \mathcal{C}$ に対して

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y)), \qquad f \longmapsto F(f)$$

は全射である

(ii) **本質的全射** (essentially surjective) である、すなわち、任意の $X' \in \mathcal{C}'$ に対して $F(X) \cong X'$ となる $X \in \mathcal{C}$ が存在する

を満たすならば、$F = \Pi \circ \mathcal{Z}(F)$ を満たす組み紐モノイダル共変関手 $\mathcal{Z}(F) : (\mathcal{V}, c) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ が一意的に存在する。この事実から、c を $\mathcal{V}$ の組み紐構造とすると、$1_{\mathcal{V}} = \Pi \circ (Z, \phi, \omega)$ を満たす組み紐モノイダル共変関手 $(Z, \phi, \omega) : (\mathcal{V}, c) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{V})$ が一意的に存在することがわかる。ここで、$1_{\mathcal{V}}$ は $\mathcal{V}$ 上の恒等モノイダル関手である。

❶は次の補題から従う。

補題 2.1 $\mathcal{V} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, r, l)$, $\mathcal{V}' = (\mathcal{C}', \otimes, \mathbb{1}', a', r', l')$ を 2 つのモノイダル圏とする。充満かつ本質的全射なモノイダル共変関手 $(F, \phi, \omega) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ に対して、次の図式を可換にする組み紐モノイダル共変関手 $(\mathcal{Z}(F), \mathcal{Z}(\phi), \mathcal{Z}(\omega)) : \mathcal{Z}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ を構成することができる：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}(\mathcal{V}) \arrow[r, "\mathcal{Z}(F)"] \arrow[d, "\Pi"'] & \mathcal{Z}(\mathcal{V}') \arrow[d, "\Pi'"] \\
\mathcal{V} \arrow[r, "F"] & \mathcal{V}'
\end{tikzcd}$$

但し、Π, Π' は中心の構成方法から標準的に定義されるモノイダル共変関手である。

さらに、対応規則 $(F,\phi,\omega)\longmapsto(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega))$ はモノイダル関手の合成を保つ。

(証明)

• $\mathcal{Z}(F)$ の構成方法：

$(V,c_{-,V})$ を $\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ の対象とする。各 $X'\in\mathcal{C}'$ に対して同型射 $g:F(X)\longrightarrow X'$ を1つとり、$\mathcal{C}'$ の同型射 $c'_{X',F(V)}:X'\otimes F(V)\longrightarrow F(V)\otimes X'$ を合成

$$c'_{X',F(V)}=(\mathrm{id}\otimes g)\circ\phi^{-1}_{V,X}\circ F(c_{X,V})\circ\phi_{X,V}\circ(g^{-1}\otimes\mathrm{id})$$

によって定義する。$c'_{X',F(V)}$ は X,g の選び方によらずに定義されている。

$c'_{-,F(V)}:=\{c'_{X',F(V)}\}_{X'\in\mathcal{C}'}$ とおくと、F が充満であることから、$(F(V),c'_{-,F(V)})\in\mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ である。

$\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ の射 $f:(U,c_{-,U})\longrightarrow(V,c_{-,V})$ に対して $\mathcal{C}'$ の射 $F(f):F(U)\longrightarrow F(V)$ は $\mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ の射 $(F(U),c'_{-,F(U)})\longrightarrow(F(V),c'_{-,F(V)})$ になっていることがわかる。こうして、共変関手 $\mathcal{Z}(F):\mathcal{Z}(\mathcal{V})\longrightarrow\mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ が定義される。

• $\mathcal{Z}(\phi)$ の構成方法：

$(U,c_{-,U}),(V,c_{-,V})\in\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ とする。$(U,c_{-,U})\otimes(V,c_{-,V})=(U\otimes V,c_{-,U\otimes V})$ により $c_{-,U\otimes V}$ を定めると、$\phi_{U,V}:F(U)\otimes F(V)\longrightarrow F(U\otimes V)$ は $(F(U),c'_{-,F(U)})\otimes(F(V),c'_{-,F(V)})$ から $(F(U\otimes V),c'_{-,F(U\otimes V)})$ への $\mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ における同型射になっていることがわかる。この同型射を $\mathcal{Z}(\phi)_{(U,c_{-,U}),(V,c_{-,V})}$ と書き、

$$\mathcal{Z}(\phi)=\{\mathcal{Z}(\phi)_{(U,c_{-,U}),(V,c_{-,V})}\}_{(U,c_{-,U}),(V,c_{-,V})\in\mathcal{Z}(\mathcal{V})}$$

と定義する。

• $\mathcal{Z}(\omega)$ の構成方法：

$\omega:\mathbf{1}'\longrightarrow F(\mathbf{1})$ は $(\mathbf{1}',l'^{-1}\circ r')$ から $(F(\mathbf{1}),c'_{-,F(\mathbf{1})})=(\mathcal{Z}(F))(\mathbf{1},l^{-1}\circ r)$ への $\mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ における同型射である。この同型射を $\mathcal{Z}(\omega)$ と書く。

• 組 $(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega)):\mathcal{Z}(\mathcal{V})\longrightarrow\mathcal{Z}(\mathcal{V}')$ は補題の図式を可換にする組み紐モノイダル共変関手であることは簡単にわかる。さらに、上記のように構成される $(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega))$ は組み紐構造を保つことがわかり、さらに、対応規則 $(F,\phi,\omega)\longmapsto(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega))$ がモノイダル関手の合成を保つことも確かめられる。 □

$(F,\phi,\omega):\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}$ を充満かつ本質的全射なモノイダル共変関手とする。$\xi:(F,\phi,\omega)\Longrightarrow 1_{\mathcal{V}}$ がモノイダル自然同値ならば、補題2.1の証明のように構成される組み紐モノイダル共変関手 $(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega)):\mathcal{Z}(\mathcal{V})\longrightarrow\mathcal{Z}(\mathcal{V})$ に対して、ξ は組み紐モノイダル自然同値 $\xi:(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega))\Longrightarrow 1_{\mathcal{Z}(\mathcal{V})}$ を定義する。このことと対応規則 $(F,\phi,\omega)\longmapsto(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega))$ がモノイダル関手の合成を保つことから、(F,ϕ,ω) がモノイダル圏同値を与えるモノイダル共変関手であるとき、補題2.1の証明のように定義される組み紐モノイダル共変関手 $(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega))$ は組み紐モノイダル圏同値を与えることがわかる。

次に、❷について説明する。Drinfel'd の二重化 Hopf 代数 $D(H)$ 上の左加群は、左 H-加群と右 H-余加群の構造を同時に持ち、ある種の交換条件を満たすものとして捉えることができる。このような対象は Yetter-Drinfel'd 加群と呼ばれる。Yetter-Drinfel'd 加群の概念は、crossed bimodule という名称で Yetter [40] により導入された。Yetter-Drinfel'd 加群という名称は [27] で初めて使われた。次の補題は Yetter-Drinfel'd 加群の定義を理解するのに役に立つ。

補題 2.2 H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。このとき、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 M に対して、次の 2 つは 1 対 1 に対応する。

① M に左 $D(H)$-加群構造を与える。

② M に次式が成り立つような左 H-加群かつ右 H-余加群の構造を与える：任意の $h \in H$ と任意の $m \in M$ に対して

$$\sum (h_{(1)} \cdot m_{(0)}) \otimes (h_{(2)} m_{(1)}) = \sum (h_{(2)} \cdot m)_{(0)} \otimes (h_{(2)} \cdot m)_{(1)} h_{(1)}. \tag{2.1}$$

但し、右余作用 $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$ による m の像を $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ と表わす。

(証明)

M に左 $D(H)$-加群構造が与えられると、その作用を $D(H)$ の部分代数 H と H^* に制限することにより、M に左 H-加群かつ左 H^*-加群の構造が定まる。この 2 つの作用の間には、任意の $p \in H^*$, $h \in H$ と任意の $m \in M$ に対して

$$h \cdot (p \cdot m) = \sum \langle p_{(1)}, S^{-1}(h_{(3)}) \rangle \langle p_{(3)}, h_{(1)} \rangle\, p_{(2)} \cdot (h_{(2)} \cdot m) \tag{2.2}$$

が成り立つ。逆に、$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 M に左 H-加群かつ左 H^*-加群の構造が与えられていて、(2.2) を満たすと、M に左 $D(H)$-加群の構造が入る。

$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 M に対して、M に対する左 H^*-加群構造全体と右 H-余加群構造全体は、次の対応により、1 対 1 に対応する。

- M への右 H-余作用 $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$

  $\longmapsto$ M への左 H^*-作用 $\alpha : H^* \otimes M \longrightarrow M$

  $$\alpha(p \otimes m) = \sum \langle p, m_{(1)} \rangle m_{(0)}$$

- M への左 H^*-作用 $\alpha : H^* \otimes M \longrightarrow M$

  $\longmapsto$ M への右 H-余作用 $\rho : M \longrightarrow M \otimes H$

  $$\rho(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i^*, m) \otimes e_i.$$

但し、$\{e_i\}_{i=1}^n$ と $\{e_i^*\}_{i=1}^n$ は H と H^* の互いに双対的な基底である。

このことから、M に左 $D(H)$-加群の構造を与えるということと、M に次の等式を満たす左 H-加群かつ右 H-余加群の構造を与えることとは同値であることがわかる：任意の $h \in H$ と任意の $m \in M$ に対して

$$\sum (h \cdot m_{(0)}) \otimes m_{(1)} = \sum (h_{(2)} \cdot m)_{(0)} \otimes S^{-1}(h_{(3)}) (h_{(2)} \cdot m)_{(1)} h_{(1)}. \tag{2.3}$$

(2.3) はまた、任意の $h, h' \in H$ と任意の $m \in M$ に対して

$$\sum (h \cdot m_{(0)}) \otimes h' m_{(1)} = \sum (h_{(2)} \cdot m)_{(0)} \otimes h' S^{-1}(h_{(3)}) (h_{(2)} \cdot m)_{(1)} h_{(1)} \tag{2.4}$$

が成り立つことと同値である。この等式において $h \otimes h'$ の部分を $\Delta(h)$ で置き換えると、(2.1) が得られる。

逆に、(2.1) が成り立つように、M に左 H-加群と右 H-余加群の構造が与えられているとする。このとき、(2.1) の両辺に左から $1_H \otimes S^{-1}(h')$ を作用させることにより、(2.3) が得られる。これは M に左 $D(H)$-加群の構造が入ることを意味する。 □

注意：ベクトル空間への左 H^*-加群構造と右 H-余加群構造との間の補題の証明の中の 1 対 1 対応の下で、左 H^*-加群 M, N の間の $\boldsymbol{k}$-線形写像 $f : M \longrightarrow N$ が左 H^*-加群準同型となるための必要十分条件は f が右 H-余加群準同型になることである。

補題 2.2 から次のような加群の概念に辿り着く ([23; Section 10.6], [30], [36] 等を参照)。

定義 2.3 H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の双代数とする。

(1) 左 H-加群かつ右 H-余加群 M が **(左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群**であるとは、任意の $h \in H$ と任意の $m \in M$ に対して (2.1) が成り立つときをいう。(2.1) は **Yetter-Drinfel'd 条件**と呼ばれる。

(2) M_1, M_2 を (左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群とする。$\boldsymbol{k}$-線形写像 $f : M_1 \longrightarrow M_2$ が **Yetter-Drinfel'd 準同型**であるとは、f が左 H-加群準同型かつ右 H-余加群準同型であるときをいう。

補題 2.4 (Yetter [40]) H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の双代数とする。(左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群を対象とし、それらの間の準同型を射とする圏を ${}_H\mathcal{YD}^H$ と記し、**Yetter-Drinfel'd 圏**と呼ぶ。(左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群 M, N に対して、ベクトル空間としてのテンソル積 $M \otimes N$ に次のように (左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群構造を入れることができる。

$$h \in H,\ m \in M,\ n \in N \text{ に対し、} h \cdot (m \otimes n) = \sum (h_{(1)} \cdot m) \otimes (h_{(2)} \cdot n),$$
$$m \in M,\ n \in N \text{ に対し、} m \otimes n \longmapsto \sum m_{(0)} \otimes n_{(0)} \otimes n_{(1)} m_{(1)}.$$

このように定義されるテンソル積に関して、圏 ${}_H\mathcal{YD}^H$ はモノイダル圏をなす。

(左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群 M, N に対して、$c_{M,N} : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M$ を任意の $m \in M,\ n \in N$ に対して

$$c_{M,N}(m \otimes n) = \sum n_{(0)} \otimes (n_{(1)} \cdot m)$$

を満たす $\boldsymbol{k}$-線形写像とすると、$c = \{c_{M,N}\}_{M,N \in {}_H\mathcal{YD}^H}$ は ${}_H\mathcal{YD}^H$ に対する前組み紐構造 (pre-braiding) になる、すなわち、c は組み紐構造であるための条件のうち、「任意の対象 M, N に対して $c_{M,N}$ が同型である」を除いてすべて満たす。もし、H が Hopf 代数ならば、この c は組み紐構造である。 □

Yetter-Drinfel'd 加群の導入過程から、H が体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数のとき、Yetter-Drinfel'd 圏 ${}_H\mathcal{YD}^H$ は ${}_{D(H)}\mathbf{M}$ と同一視される。すなわち、次が成り立つ。

定理 2.5 (Majid [19]) H が体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数ならば、組み紐モノイダル圏として ${}_H\mathcal{YD}^H \cong {}_{D(H)}\mathbf{M}$ となる。 □

A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元Hopf代数とする。上の結果から、左 $D(A)$-加群 V は左 A-加群の構造にYetter-Drinfel'd条件を満たすような右 A-余加群の構造を付加したものと言える。Yetter-Drinfel'd条件を満たすような右 A-余加群の構造は、Drinfel'dの二重化が標準的に持っている普遍 R-行列 $\mathcal{R}$ から定まる組み紐構造 c から復元される。より詳しくは、$c_{-,V} = \{c_{X,V} : X\otimes V \longrightarrow V\otimes X\}_{X\in {}_A\mathbf{M}}$ から復元される。ここで、左 A-加群 X に対して $c_{X,V}$ は、

$$c_{X,V}(x\otimes v) = T_{X,V}(\mathcal{R}\cdot(x\otimes v)) \qquad (x\in X,\ v\in V) \tag{2.5}$$

によって定義される左 A-加群の間の同型射であり、$T_{X,V}$ は $T_{X,V}(x\otimes v) = v\otimes x$ $(x\in X,\ v\in V)$ により定義される $\boldsymbol{k}$-線形写像である。こうして、左 $D(A)$-加群 V は左 A-加群 V と自然同値 $c_{-,V} : -\otimes V \longrightarrow V\otimes -$ との組 $(V, c_{-,V}) \in \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M})$ として捉えられることがわかる。すなわち、次が成り立つ(詳しくは [12; XIII.5] を参照)。

定理 2.6 ([11,18]) A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元Hopf代数とする。このとき、組み紐モノイダル圏として $\mathcal{Z}({}_A\mathbf{M})$ と ${}_{D(A)}\mathbf{M}$ とは同値である。 □

注意:定理の組み紐モノイダル圏同値を与える共変関手 $F : \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M}) \longrightarrow {}_{D(A)}\mathbf{M}$ およびその準逆関手(quasi-inverse) $G : {}_{D(A)}\mathbf{M} \longrightarrow \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M})$ は次のように与えられる。

$$F : \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M}) \longrightarrow {}_{D(A)}\mathbf{M} \qquad \begin{array}{lccc} \text{対象に対して} & (V, c_{-,V}) & \longmapsto & V, \\ \text{射に対して} & f & \longmapsto & f. \end{array} \tag{2.6}$$

ここで、$(V, c_{-,V}) \in \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M})$ に対し、$F(V, c_{-,V}) = V$ への右 H-余作用 $\rho_V : V \longrightarrow V\otimes A$ は

$$\rho_V(v) = c_{A,V}(1\otimes v) \qquad (v\in V)$$

によって定義される((V, ρ_V) は(左-右) A-Yetter-Drinfel'd 加群をなし、したがって、V には左 $D(A)$-加群の構造が入る)。

$$G : {}_{D(A)}\mathbf{M} \longrightarrow \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M}) \qquad \begin{array}{lccc} \text{対象に対して} & V & \longmapsto & (V, c_{-,V}), \\ \text{射に対して} & f & \longmapsto & f \end{array} \tag{2.7}$$

ここで、左 $D(A)$-加群 V に対して $c_{-,V}$ は (2.5) のように定義される左 A-加群の間の同型射 $c_{X,V} : X\otimes V \longrightarrow V\otimes X$ $(X\in {}_A\mathbf{M})$ からなる。これらは、$G\circ F = 1_{\mathcal{Z}({}_A\mathbf{M})}$, $F\circ G = 1_{{}_{D(A)}\mathbf{M}}$ および $\Pi_A\circ G = R_A : {}_{D(A)}\mathbf{M} \longrightarrow {}_A\mathbf{M}$ を満たす。

命題 2.7 A, B を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元Hopf代数とし、$(F, \phi, \omega) : {}_A\mathbf{M} \longrightarrow {}_B\mathbf{M}$ をモノイダル圏同値を与えるモノイダル共変関手とする。このとき、図式 (1.5) を可換にする組み紐モノイダル圏同値を与える、組み紐モノイダル共変関手 $(\tilde{F}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) : {}_{D(A)}\mathbf{M} \longrightarrow {}_{D(B)}\mathbf{M}$ が存在する。

(証明)

(2.7) で与えられる G が誘導する組み紐モノイダル共変関手 ${}_{D(A)}\mathbf{M} \longrightarrow \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M})$ を $(G_1, \phi_1', \omega_1')$ と書き、B に対して (2.6) で与えられる F が誘導する組み紐モノイダル共変関手 $\mathcal{Z}({}_B\mathbf{M}) \longrightarrow {}_{D(B)}\mathbf{M}$ を (F_2, ϕ_2, ω_2) と書くことにする。

$$(\tilde{F}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) := (F_2, \phi_2, \omega_2)\circ(\mathcal{Z}(F), \mathcal{Z}(\phi), \mathcal{Z}(\omega))\circ(G_1, \phi_1', \omega_1') : {}_{D(A)}\mathbf{M} \longrightarrow {}_{D(B)}\mathbf{M}$$

とおく。$(\tilde{F},\tilde{\phi},\tilde{\omega})$ は、組み紐モノイダル共変関手の合成として、組み紐モノイダル共変関手である。次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
{}_{D(A)}\mathbf{M} \arrow[rrr, "{(\tilde{F},\tilde{\phi},\tilde{\omega})}"] \arrow[dr, "{(G_1,\phi'_1,\omega'_1)}"] \arrow[dd, "{\Pi_A\circ(G_1,\phi'_1,\omega'_1)}"'] & & & {}_{D(B)}\mathbf{M} \arrow[dd, "{\Pi_B\circ(G_2,\phi'_2,\omega'_2)}"] \\
& \mathcal{Z}({}_A\mathbf{M}) \arrow[r, "{(\mathcal{Z}(F),\mathcal{Z}(\phi),\mathcal{Z}(\omega))}"] \arrow[dl, "\Pi_A"] & \mathcal{Z}({}_B\mathbf{M}) \arrow[ur, "{(F_2,\phi_2,\omega_2)}"] \arrow[dr, "\Pi_B"'] \arrow[r, phantom, "①"] & \\
{}_A\mathbf{M} \arrow[rrr, "{(F,\phi,\omega)}"] & & & {}_B\mathbf{M}
\end{tikzcd}$$

但し、Π_A,Π_B は中心の構成方法から標準的に定義されるモノイダル共変関手である。また、(G_2,ϕ'_2,ω'_2) は (2.7) で与えられる組み紐モノイダル共変関手 $G:{}_{D(B)}\mathbf{M}\longrightarrow\mathcal{Z}({}_B\mathbf{M})$ である(①の部分の可換性は $(G_2,\phi'_2,\omega'_2)\circ(F_2,\phi_2,\omega_2)=1_{\mathcal{Z}({}_B\mathbf{M})}:\mathcal{Z}({}_B\mathbf{M})\longrightarrow\mathcal{Z}({}_B\mathbf{M})$ であることから従う)。$\Pi_A\circ(G_1,\phi'_1,\omega'_1)=R_A$, $\Pi_B\circ(G_2,\phi'_2,\omega'_2)=R_B$ であり、$(\tilde{F},\tilde{\phi},\tilde{\omega})$ は組み紐モノイダル圏同値を与えることがわかるので、命題の証明が終わる。 □

§3. Radford の誘導関手と主定理の証明

体 k 上の双代数 H に対して、右 H-余加群の構造を忘れるという制限関手 $\mathrm{RRes}:{}_H\mathcal{YD}^H\longrightarrow{}_H\mathbf{M}$ が定義される。Radford [26] は H^{op} が Hopf 代数のとき、この制限関手の右随伴が存在することを示した。RRes の右随伴を Radford の誘導関手と呼び、$\mathrm{RInd}:{}_H\mathbf{M}\longrightarrow{}_H\mathcal{YD}^H$ で表わす。ここでは、Radford の誘導関手の構成方法を [10] に従って説明し、Schrödinger 加群 ${}_{D(H)}H$ が $\mathrm{RInd}(k)$ と同型であることを示す。この事実が主定理証明の鍵である。

補題 2.2 の証明と同様にして、次が成り立つことがわかる。

補題 3.1 (Lambe-Radford [13; Lemma 5.1.1]) H を体 k 上の双代数とし、H^{op} は対合 $\overline{S}$ を持つ Hopf 代数とする。左 H-加群かつ右 H-余加群 $(M,\cdot,\rho)$ に対して

$$(M,\cdot,\rho)\in{}_H\mathcal{YD}^H \iff \text{任意の } h\in H \text{ と任意の } m\in M \text{ に対して}$$
$$\rho(h\cdot m)=\sum h_{(2)}\cdot m_{(0)}\otimes h_{(3)}m_{(1)}\overline{S}(h_{(1)}).$$

補題 3.2 (Radford [26; Proposition 2]) H を体 k 上の双代数とし、H^{op} は対合 $\overline{S}$ を持つ Hopf 代数とする。

(1) $L\in{}_H\mathbf{M}$ に対して、$L\otimes H$ は次の左作用 $\cdot$ と右余作用 ρ に関して (左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群になる。

$$\left.\begin{aligned} h\cdot(l\otimes a)&=\sum(h_{(2)}\cdot l)\otimes h_{(3)}a\overline{S}(h_{(1)}),\\ \rho(l\otimes h)&=\sum(l\otimes h_{(1)})\otimes h_{(2)}\end{aligned}\right.\qquad (h,a\in H,\ l\in L).$$

(2) $M\in{}_H\mathcal{YD}^H$, $L\in{}_H\mathbf{M}$ とし、$p:M\longrightarrow L$ を左 H-加群準同型とする。$f:M\longrightarrow L\otimes H$ を

$$f(m)=\sum p(m_{(0)})\otimes m_{(1)}\qquad(m\in M)$$

によって定義する。このとき、f は Yetter-Drinfel'd 準同型である。 □

H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の双代数とし、H^{op} は対合 $\overline{S}$ を持つ Hopf 代数とする。補題 3.2(1) より、任意の左 H-加群に対して $M \otimes H$ は (左-右) H-Yetter-Drinfel'd 加群になる。この Yetter-Drinfel'd 加群を $\mathrm{RInd}(M)$ と記すことにする。$f : M \longrightarrow N$ が左 H-加群準同型ならば、$\mathrm{RInd}(f) := f \otimes \mathrm{id}_M : \mathrm{RInd}(M) \longrightarrow \mathrm{RInd}(N)$ は Yetter-Drinfel'd 準同型となる。このことから、RInd は共変関手 $\mathrm{RInd} : {}_H\mathbf{M} \longrightarrow {}_H\mathcal{YD}^H$ を定義する。この関手を **Radford の誘導関手**と呼ぶ。

命題 3.3 (Frobenius 相互律 [10; Lemma 2.1]) H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の双代数とし、H^{op} は対合 $\overline{S}$ を持つ Hopf 代数とする。このとき、任意の $M \in {}_H\mathcal{YD}^H$ と任意の $V \in {}_H\mathbf{M}$ に対して

$$f \in \mathrm{Hom}_{{}_H\mathbf{M}}(\mathrm{RRes}(M), V) \longmapsto \varphi(f) \in \mathrm{Hom}_{{}_H\mathcal{YD}^H}(M, \mathrm{RInd}(V)),$$
$$\big(\varphi(f)\big)(m) = \sum f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)} \quad (m \in M)$$

によって定義される写像

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{{}_H\mathbf{M}}(\mathrm{RRes}(M), V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}_H\mathcal{YD}^H}(M, \mathrm{RInd}(V))$$

は $\boldsymbol{k}$-線形同型写像である。さらに、この線形同型写像は $\alpha \in \mathrm{Hom}_{{}_H\mathcal{YD}^H}(M, N)$ と $\beta \in \mathrm{Hom}_{{}_H\mathbf{M}}(U, V)$ に関して自然性を持つ。

(略証)

$\psi : \mathrm{Hom}_{{}_H\mathcal{YD}^H}(M, \mathrm{RInd}(V)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}_H\mathbf{M}}(\mathrm{RRes}(M), V)$ を各 Yetter-Drinfel'd 加群準同型 $g : M \longrightarrow \mathrm{RInd}(V)$ に対して $\boldsymbol{k}$-線形写像

$$\psi(g) : \mathrm{RRes}(M) \longrightarrow V, \qquad m \longmapsto (\mathrm{id}_V \otimes \varepsilon)(g(m)) \qquad (m \in M)$$

を対応させる写像とする。$\psi(g)$ は左 H-加群準同型であり、ψ は φ の逆写像である。 □

注意：制限関手 $\mathrm{RRes} : {}_H\mathcal{YD}^H \longrightarrow {}_H\mathbf{M}$ はモノイダル共変関手とみすことができるが、Radford の誘導関手 $\mathrm{RInd} : {}_H\mathbf{M} \longrightarrow {}_H\mathcal{YD}^H$ は、$\dim H > 1$ のとき、モノイダル共変関手とはみなせない。なぜなら、$U, V \in {}_H\mathbf{M}$ に対して $\dim(\mathrm{RInd}(U) \otimes \mathrm{RInd}(V)) = (\dim U)(\dim V)(\dim H)^2$ であり、$\dim(\mathrm{RInd}(U \otimes V)) = (\dim U)(\dim V)(\dim H)$ だから、$\dim H > 1$ ならば、$\boldsymbol{k}$-線形同型写像 $\mathrm{RInd}(U) \otimes \mathrm{RInd}(V) \longrightarrow \mathrm{RInd}(U \otimes V)$ を作ることはできないからである。

H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とすると、${}_H\mathcal{YD}^H \cong {}_{D(H)}\mathbf{M}$ であるから、2つの共変関手 $I_H : {}_H\mathbf{M} \xrightarrow{\mathrm{RInd}} {}_H\mathcal{YD}^H \cong {}_{D(H)}\mathbf{M}$ と $R_H : {}_{D(H)}\mathbf{M} \cong {}_H\mathcal{YD}^H \xrightarrow{\mathrm{RRes}} {}_H\mathbf{M}$ が定義され、I_H は R_H の右随伴となる。I_H もまた Radford の誘導関手と呼ぶ。定義により、$R_H : {}_{D(H)}\mathbf{M} \longrightarrow {}_H\mathbf{M}$ は、各左 $D(A)$-加群 V に対して、Hopf 代数の埋め込み $\iota : H \hookrightarrow D(H)$, $\iota(h) = \varepsilon_H \bowtie h$ により左 H-加群とみなしたものを対応させる関手である。

H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。$V \in {}_H\mathbf{M}$ に対して $\mathrm{RInd}(V) \in {}_H\mathcal{YD}^H \cong {}_{D(H)}\mathbf{M}$ となる。$\mathrm{RInd}(V) = V \otimes H$ への H の左作用と右余作用 ρ はそれぞれ次のように与えられる：

$$h \cdot (v \otimes a) = \sum (h_{(2)} \cdot v) \otimes h_{(3)} a S^{-1}(h_{(1)}),$$
$$\rho(v \otimes h) = \sum (v \otimes h_{(1)}) \otimes h_{(2)}.$$

右余作用 ρ に対応する $\mathrm{RInd}(V)$ への左 H^*-作用は

$$p\cdot(v\otimes h)=\sum\langle p,(v\otimes h)_{(1)}\rangle(v\otimes h)_{(0)}=\sum\langle p,h_{(2)}\rangle\, v\otimes h_{(1)}$$

で与えられるから、これに対応する $D(H)$ の $\mathrm{RInd}(V)$ への左作用は次で与えられることがわかる：$p\in H^*$, $h,a\in H$, $v\in V$ に対し

$$\begin{aligned}(p\bowtie h)\cdot(v\otimes a)&=p\cdot(h\cdot(v\otimes a))\\&=\sum\langle p,\ h_{(5)}a_{(2)}S^{-1}(h_{(1)})\rangle\,(h_{(3)}\cdot v)\otimes(h_{(4)}a_{(1)}S^{-1}(h_{(2)})).\end{aligned}$$

特に、$V=\boldsymbol{k}$ (H の左作用は ε により定義) のとき、$\boldsymbol{k}\otimes H$ を H と同一視すると、

$$(p\bowtie h)\cdot a=\sum\langle S^{-1}(p),\ h_{(1)}S(a_{(2)})S(h_{(4)})\rangle\, S^{-1}(h_{(2)}S(a_{(1)})S(h_{(3)}))$$

となる。つまり、$\mathrm{RInd}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}\otimes H=H$ への $D(H)$ の左作用は

$$S((p\bowtie h)\cdot S^{-1}(a))=\sum\langle S^{-1}(p),\ h_{(1)}a_{(1)}S(h_{(4)})\rangle\, h_{(2)}a_{(2)}S(h_{(3)}) \tag{3.1}$$

を満たす。右辺は $D(H)$ の Schrödinger 加群 ${}_{D(H)}H:=(H,\rightharpoonup)$ における左作用に一致している。よって、次が示された。

補題 3.4 H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とし、$\mathrm{RInd}:{}_H\mathbf{M}\longrightarrow{}_H\mathcal{YD}^H\cong{}_{D(H)}\mathbf{M}$ を Radford の誘導関手とする。このとき、

$$\Phi:{}_{D(H)}H\longrightarrow\mathrm{RInd}(\boldsymbol{k}),\quad \Phi(a)=1\otimes S^{-1}(a)\qquad(a\in H)$$

は左 $D(H)$-加群の同型写像である。 □

(定理 1.2 の証明)

モノイダル共変関手 $(G,\phi',\omega'):{}_B\mathbf{M}\longrightarrow{}_A\mathbf{M}$ を $(F,\phi,\omega):{}_A\mathbf{M}\longrightarrow{}_B\mathbf{M}$ の準逆とする。また、$(\tilde F,\tilde\phi,\tilde\omega):{}_{D(A)}\mathbf{M}\longrightarrow{}_{D(B)}\mathbf{M}$ および $(\tilde G,\tilde\phi',\tilde\omega'):{}_{D(B)}\mathbf{M}\longrightarrow{}_{D(A)}\mathbf{M}$ をそれぞれ (F,ϕ,ω) および (G,ϕ',ω') から命題2.7のように導かれる組み紐モノイダル共変関手とする。$(\tilde G,\tilde\phi',\tilde\omega')$ は $(\tilde F,\tilde\phi,\tilde\omega)$ の準逆である。

$$\begin{aligned}R'_B&:=(F,\phi,\omega)\circ R_A\circ(\tilde G,\tilde\phi',\tilde\omega'):{}_{D(B)}\mathbf{M}\longrightarrow{}_B\mathbf{M},\\ I'_B&:=(\tilde F,\tilde\phi,\tilde\omega)\circ I_A\circ(G,\phi',\omega'):{}_B\mathbf{M}\longrightarrow{}_{D(B)}\mathbf{M}\end{aligned}$$

とおく。このとき、自然同値 $j:R'_B\Longrightarrow R_B$ が存在し、I'_B は R'_B の右随伴であることがわかる。したがって、I'_B は R_B の右随伴である。Radford の誘導関手 $I_B:{}_B\mathbf{M}\longrightarrow{}_{D(B)}\mathbf{M}$ は R_B の右随伴であったから、右随伴の一意性により、自然同値 $i:I'_B\Longrightarrow I_B$ であって、任意の $W\in{}_{D(B)}\mathbf{M}$ と任意の $N\in{}_B\mathbf{M}$ に対して次の図式が可換になるものが存在する：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{{}_B\mathbf{M}}(R'_B(W),N) & \xrightarrow{\ \varphi'\ } & \mathrm{Hom}_{{}_{D(B)}\mathbf{M}}(W,I'_B(N))\\ {\scriptstyle j_*^{-1}}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle i_*}\\ \mathrm{Hom}_{{}_B\mathbf{M}}(R_B(W),N) & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathrm{Hom}_{{}_{D(B)}\mathbf{M}}(W,I_B(N))\end{array}$$

ここで、φ は命題3.3のように定義される自然同値である。

さて、左 $D(B)$-加群として

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F}({}_{D(A)}A) & \cong & \tilde{F}(I_A(\boldsymbol{k},\varepsilon_A)) = (\tilde{F}\circ I_A)(\boldsymbol{k},\varepsilon_A) & \cong & (\tilde{F}\circ I_A\circ G\circ F)(\boldsymbol{k},\varepsilon_A) \\ & \uparrow & & \uparrow & \| \quad \leftarrow (I'_B \text{ の定義}) \\ & \text{補題 3.4} & & \left(\begin{array}{c}\text{自然同値} \\ G\circ F \overset{\xi}{\Longrightarrow} 1_{{}_A\mathsf{M}} \text{ が存在}\end{array}\right) & (I'_B\circ F)(\boldsymbol{k},\varepsilon_A) \end{array}$$

となる。$i(F(\boldsymbol{k},\varepsilon_A)) : I'_B(F(\boldsymbol{k},\varepsilon_A)) \longrightarrow I_B(F(\boldsymbol{k},\varepsilon_A))$ は左 $D(B)$-加群の同型なので、

$$\tilde{F}({}_{D(A)}A) \cong I_B(F(\boldsymbol{k},\varepsilon_A)) \qquad \text{as left } D(B)\text{-modules}$$

を得る。$\omega : (\boldsymbol{k},\varepsilon_B) \longrightarrow F(\boldsymbol{k},\varepsilon_A)$ は左 B-加群の同型なので、

$$\begin{array}{ccccc} {}_{D(B)}B & \cong & I_B(\boldsymbol{k},\varepsilon_B) & \cong & I_B(F(\boldsymbol{k},\varepsilon_A)) \cong \tilde{F}({}_{D(A)}A) \quad \text{as left } D(B)\text{-modules} \\ & \uparrow & & \uparrow & \\ & \text{補題 3.4} & & I_B(\omega) \text{ は同型} & \end{array}$$

を得る。これで、定理は証明された。 □

§4. 応用：Schrödinger 加群を用いたモノイダル森田同値不変量の構成と例

ここでは、有限次元 Hopf 代数 A に対して、組み紐の各糸に、$D(A)$ 上の Schrödinger 加群を割り当てることにより定義される組み紐群 B_n の表現を考察する [28]。この表現の組み紐トレースを取ることにより、A のモノイダル森田同値不変量が得られる。$D(A)$ の左正則加群を用いた同種の不変量は清水氏 [31] により詳しく考察されている。閉包が Hopf 絡み目になるときの計算結果から、左正則加群を用いたときにはない、興味深い現象が見られる。

Hopf 代数 A に普遍 R 行列 $R=\sum_i \alpha_i\otimes\beta_i$ が与えられると、$M\in {}_A\mathsf{M}$ の組み紐構造 c^R が

$$(c^R)_{X,Y}(x\otimes y)=\sum_i \beta_i\cdot y\otimes\alpha_i\cdot x \qquad (x\in X,\ y\in Y,\ X,Y\in {}_A\mathsf{M})$$

によって定義される。

定義 4.1 $\mathcal{V}=(\mathcal{C},\otimes,\mathbb{1},a,r,l,c)$ を左剛的組み紐モノイダル圏とする。$X\in\mathcal{C}$ に対して、左双対 (X^*,e_X,n_X) を 1 つ選ぶ。$\mathcal{C}$ における射 $f:X\longrightarrow X$ に対して、次の合成写像

$$\mathbb{1}\xrightarrow{n_X} X\otimes X^* \xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}} X\otimes X^* \xrightarrow{c_{X,X^*}} X^*\otimes X \xrightarrow{e_X} \mathbb{1}$$

を f の $\mathcal{V}$ における**組み紐トレース** (braided trace) といい、$\underline{\mathrm{Tr}}_c f$ によって表わす。特に、$\underline{\mathrm{Tr}}_c(\mathrm{id}_X)$ を X の $\mathcal{V}$ における**組み紐次元** (braided dimension) といい、$\underline{\dim}_c X$ によって表わす。組み紐トレースおよび組み紐次元は、左双対 (X^*,e_X,n_X) の選び方によらない。

注意 4.2 1°. $\mathcal{V}$ が $\mathbb{C}$-線形アーベル圏で、対称モノイダル圏をなし、かつ、単純対象の同型類が有限個しかないとき、$\mathcal{V}$ における任意の対象の組み紐次元は整数であることが分かっている [2; Theorem 7.2]。したがって、三角 Hopf 代数 (*i.e.* 普遍 R 行列が $R_{21}R=1\otimes 1$ を満たす準三角 Hopf 代数) の有限次元表現の組み紐次元は整数である [2; Corollary 7.3]。
2°. 有限次元 Hopf 代数 A の Drinfel'd 二重化 $(D(A),\mathcal{R})$ に対し、$\underline{\dim}_{c^{\mathcal{R}}} D(A)=\mathrm{Tr}\,S^{-2}$ が成り立つ [17,20]。$\mathrm{Tr}S^2$ は Larson と Radford [14,15], Majid [17] により、Hopf 代数の半単純性に関わる重要な不変量であることが知られている。

B_n を n 糸からなる組み紐群とする。左 $D(H)$-加群 M が与えられると、正の交差点に $c^{\mathcal{R}}_{M,M}$ を対応させ、負の交差点に $(c^{\mathcal{R}}_{M,M})^{-1}$ を対応させることにより、$X := M^{\otimes n}$ を表現空間とする B_n の表現 $\rho_M : B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(X)$ が定義される。すると、各 $\boldsymbol{b} \in B_n$ に対し、$\rho_M(\boldsymbol{b}) : X \longrightarrow X$ の組み紐トレース $\underline{\dim}_{c^{\mathcal{R}}}\rho_M(\boldsymbol{b})$ を対応させることができる。特に、$M = {}_{D(H)}H$ (Schrödinger 加群) の場合、$\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}(H) := \underline{\dim}_{c^{\mathcal{R}}}(\rho_M(\boldsymbol{b}))$ と書くことにする。

定理 4.3 H を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。任意の $\boldsymbol{b} \in B_n$ に対し、$\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}(H)$ は H のモノイダル森田同値不変量である。

上の定理の証明は [31; Theorem 3.1] とほぼ同様であるが、若干慎重に議論すべき点もある。

命題 4.4 $\mathcal{V} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, l, r, c)$, $\mathcal{V}' = (\mathcal{C}', \otimes, \mathbf{1}', a', l', r', c')$ を２つの左剛的組み紐モノイダル圏とする。$(F, \phi, \omega) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M}$ が組み紐モノイダル共変関手であるとき、$\mathcal{C}$ の任意の射 $f : X \longrightarrow X$ について次の等式が成り立つ：

$$\underline{\mathrm{Tr}}_{c'}F(f) = \omega^{-1} \circ F(\underline{\mathrm{Tr}}_c(f)) \circ \omega.$$

(証明)

$X \in \mathcal{C}$ の左双対 (X^*, e_X, n_X) に対して、

$$e'_{F(X)} := \omega^{-1} \circ F(e_X) \circ \phi_{X^*,X} : F(X^*) \otimes F(X) \longrightarrow \mathbf{1}'$$
$$n'_{F(X)} := \phi^{-1}_{X,X^*} \circ F(n_X) \circ \omega : \mathbf{1}' \longrightarrow F(X) \otimes F(X^*)$$

と定めると、$(F(X^*), e'_{F(X)}, n'_{F(X)})$ は $F(X)$ の左双対である。このことと、組み紐トレースが左双対の選び方に依らないことから、$\mathcal{C}$ の射 $f : X \longrightarrow X$ に対して、$\underline{\mathrm{Tr}}_{c'}F(f)$ は合成

$$\mathbf{1}' \xrightarrow{n'_{F(X)}} F(X) \otimes F(X^*) \xrightarrow{c'_{F(X),F(X^*)}} F(X^*) \otimes F(X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes F(f)} F(X^*) \otimes F(X) \xrightarrow{e'_{F(X)}} \mathbf{1}'$$

と一致することがわかる。したがって、次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}' \arrow[r, "n'"] \arrow[d, "\omega"'] & F(X)\otimes F(X^*) \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "\phi"'] & F(X^*)\otimes F(X) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F(f)"] \arrow[d, "\phi"'] & F(X^*)\otimes F(X) \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbf{1}' \arrow[d, "\omega"] \\
F(\mathbf{1}) \arrow[r, "F(n)"] & F(X\otimes X^*) \arrow[r, "F(c)"] & F(X^*\otimes X) \arrow[r, "F(\mathrm{id}\otimes f)"] & F(X^*\otimes X) \arrow[r, "F(e)"] & F(\mathbf{1}')
\end{tikzcd}$$

これより、命題の等式が従う。 □

系 4.5 A, B を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元ホップ代数とし、$(F, \phi, \omega) : ({}_A\mathbf{M}, c) \longrightarrow ({}_B\mathbf{M}, c')$ を $\boldsymbol{k}$-線形な組み紐モノイダル共変関手とする。このとき、任意の対象 $X \in {}_A\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}$ に対して、

$$\underline{\mathrm{Tr}}_{c'}F(f) = \underline{\mathrm{Tr}}_c f \qquad \square$$

(A, R) を体 $\boldsymbol{k}$ 上の準三角 Hopf 代数とする。各有限次元左 A-加群 M に対して、左剛的組み紐モノイダル圏 $({}_A\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}, c^R)$ における M の組み紐次元 $\underline{\dim}_{c^R}M$ を $\underline{\dim}_R M$ で表わす。$u \in A$ を (A, R) の **Drinfel'd 元**とする。u は $R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ と書いたとき、$u := \sum_i S(\beta_i)\alpha_i$ によっ

て定義される A の元である [7]。Drinfel'd 元 u を用いて $\underline{\dim}_R M$ は次式で与えられる：

$$\underline{\dim}_R M = \mathrm{Tr}(\underline{u}_M).$$

ここで、$a \in A$ に対して、$\underline{a}_M$ は $x \longmapsto a \cdot x$ $(x \in M)$ という M 上の線形変換を表わす。一般に、左 A-加群準同型 $f : M \longrightarrow M$ に対し、$\underline{\mathrm{Tr}}_{c^R}(f)$ は M, M^* の互いに双対的な基底 $\{e_i\}_{i=1}^d$, $\{e_i^*\}_{i=1}^d$ を用いて次のように計算できる：

$$\underline{\mathrm{Tr}}_{c^R}(f) = \sum_{i,j} \langle \beta_j \cdot e_i^*,\ \alpha_j \cdot f(e_i) \rangle = \sum_{i,j} \langle e_i^*,\ S(\beta_j)\alpha_j \cdot f(e_i) \rangle = \sum_i \langle e_i^*,\ u \cdot f(e_i) \rangle.$$

さらに、N を有限次元左 A-加群とし、$\phi : N \longrightarrow M$ を左 A-加群の同型射とする。N, N^* の互いに双対的な基底 $\{\phi^{-1}(e_i)\}_{i=1}^d$, $\{e_i^* \circ \phi\}_{i=1}^d$ を使って組み紐トレースを計算することにより、

$$\underline{\mathrm{Tr}}_{c^R}(\phi^{-1} \circ f \circ \phi) = \underline{\mathrm{Tr}}_{c^R}(f) \tag{4.1}$$

を得る。

Drinfel'd 二重化上の左正則加群と Schrödinger 加群に対する組み紐次元は次で与えられる。

命題 4.6 (Bulacu-Torrecillas [3; Propositions 4.3&4.5]) A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とする。このとき、$D(A)$ の Schrödinger 加群 ${}_{D(A)}A$ の組み紐次元および左正則加群 $D(A)$ の組み紐次元は $\underline{\dim}({}_{D(A)}A) = \underline{\dim}(D(A)) = \mathrm{Tr}(S_A^{-2})$ で与えられる。 □

上の命題より、A が involutory な有限次元 Hopf 代数ならば、$\underline{\dim}({}_{D(A)}A) = (\dim A)1_{\boldsymbol{k}}$ であることがわかる。特に、有限群 G に対して、群 Hopf 代数 $\boldsymbol{k}[G]$ とその双対 Hopf 代数 $\boldsymbol{k}[G]^*$ の Drinfel'd 二重化上の Schrödinger 加群の組み紐次元は次式によって与えられる。

$$\underline{\dim}(\boldsymbol{k}[G]) = \underline{\dim}(\boldsymbol{k}[G]^*) = |G|1_{\boldsymbol{k}}.$$

命題 4.6 から左正則加群 $D(A)$ の組み紐次元 $\underline{\dim} D(A)$ が A のモノイダル森田不変量であることがわかる [29; Corollary 5.9]。より一般に、次が成り立つ。

定理 4.7 (Shimizu [31; Theorem 3.1&Corollary 3.6]) 体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数 A と任意の $\boldsymbol{b} \in B_n$ に対して、

(1) $\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}(D(A))$ は A のモノイダル森田同値不変量である。

(2) $\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}(D(A^*)) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}(D(A))$.

注意：清水氏が導入した不変量 $\tau(\boldsymbol{b}; H)$ は $\underline{\mathrm{Tr}}_{c^R}$ ではなく、通常のトレースを用いて定義されている。上の定理は組み紐とレースを用いた形で記述したが、証明自体は全く同様に可能である。

(**定理 4.3 の証明**)

A, B を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とし、$(F, \phi, \omega) : ({}_A\mathbf{M}, c) \longrightarrow ({}_B\mathbf{M}, c')$ を $\boldsymbol{k}$-線形組み紐モノイダル共変関手とする。任意の $M \in {}_A\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}$ と任意の $\boldsymbol{b} \in B_n$ に対して $\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}_{c'} F(M) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}_c M$ が成り立つことを示す。

$X := M^{\otimes n}$ および $f := \rho_M(\boldsymbol{b}) : X \longrightarrow X$ とおく。図式

$$\begin{tikzcd} F(M)\otimes F(M) \arrow[r, "c'_{F(M),F(M)}"] \arrow[d, "\phi_{M,M}"'] & F(M)\otimes F(M) \arrow[d, "\phi_{M,M}"] \\ F(M\otimes M) \arrow[r, "F(c_{M,M})"] & F(M\otimes M) \end{tikzcd}$$

が可換であること、および、f が $c^{\pm 1}_{M,M}$ と id_M のいくつかのテンソル積およびそれらの合成で表されていることから、$\phi^{\pm 1}_{M,M}$ と id_M のいくつかのテンソル積およびそれらの合成によって同型写像 $\phi : F(M)^{\otimes n} \longrightarrow F(X)$ を定義すると、図式

$$\begin{tikzcd} F(M)^{\otimes n} \arrow[r, "\rho_{F(M)}(\boldsymbol{b})"] \arrow[d, "\phi"'] & F(M)^{\otimes n} \arrow[d, "\phi"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(X) \end{tikzcd}$$

は可換になる。したがって、系 4.5 と (4.1) より、

$$\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}_{c'} F(M) = \underline{\mathrm{Tr}}_{c'}(\rho_{F(M)}(\boldsymbol{b})) = \underline{\mathrm{Tr}}_{c'} F(f) = \underline{\mathrm{Tr}}_{c}(f) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}_{c} M$$

を得る。

次に、$\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数 A, B がモノイダル森田同値であるとすると、$\boldsymbol{k}$-線形モノイダル圏同値を与える、$\boldsymbol{k}$-線形モノイダル共変関手 $(F, \phi, \omega) : {}_A\mathbf{M} \longrightarrow {}_B\mathbf{M}$ が存在する。すると、定理 1.2 により、(F, ϕ, ω) から、命題 2.7 の証明のように構成される組み紐モノイダル共変関手 $(\tilde{F}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}) : {}_{D(A)}\mathbf{M} \longrightarrow {}_{D(B)}\mathbf{M}$ について、

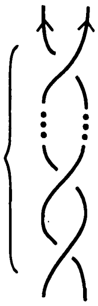
$$\tilde{F}({}_{D(A)}A) \cong {}_{D(B)}B \qquad \text{as left } D(B)\text{-modules}$$

となる。$D(A), D(B)$ に付随する普遍 R-行列をそれぞれ $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ と書くことにすると、上で示したことと (4.1) より等式 $\underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}_{\mathcal{R}}({}_{D(A)}A) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}_{\mathcal{R}'}\tilde{F}({}_{D(A)}A) = \underline{\boldsymbol{b}\text{-}\dim}_{\mathcal{R}'}({}_{D(B)}B)$ を得る。 □

$\boldsymbol{t}_{2,q}$ を右図で与えられる 2 本の糸からなる組み紐とする。
$\underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}_c X$ を次の合成によって定義する。

$$\mathbb{1} \xrightarrow{n_X} X \otimes X^* \cong X \otimes \mathbb{1} \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes n_X \otimes \mathrm{id}} X \otimes X \otimes X^* \otimes X^*$$
$$\xrightarrow{(c_{X,X})^q \otimes \mathrm{id}\otimes\mathrm{id}} X \otimes X \otimes X^* \otimes X^* \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes e'_X \otimes \mathrm{id}} X \otimes \mathbb{1} \otimes X^*$$
$$\cong X \otimes X^* \xrightarrow{e'_X} \mathbb{1}$$

q 個のねじれ



但し、$e'_X = e_X \circ c_{X,X^*}$ である。定理 4.3 と同様に、有限次元 Hopf 代数 H に対し、$\underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}(H) := \underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}_{c^{\mathcal{R}}}\, \rho_{D(H)}H(\boldsymbol{t}_{2,q})$ は H のモノイダル森田同値不変量であることがわかる。

以下、$\underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}_c X$ を X の $(2,q)$-**トーラス絡み目次元**として引用することにする。左剛的組み紐モノイダル圏 $(\mathcal{V}, c)$ が準三角 Hopf 代数 (A, R) の有限次元左 A-加群のなす左剛的組み紐モノイダル圏 $({}_A\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}, c^R)$ のときには、$\underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}_{c^R} X$ の代わりに $\underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}_R X$ と書く。特に、$q = 2$ のとき、$\underline{\mathrm{Hdim}}_R X$ と書き、これを X の **Hopf 絡み目次元**と呼ぶ。

注意 4.8 定理 4.7(2) と類似の結果は Schrödinger 加群に対しては成立しない。実際、A が非可換有限群の群 Hopf 代数のとき、$\underline{\mathrm{Hdim}}({}_{D(A)}A) \neq \underline{\mathrm{Hdim}}({}_{D(A^*)}A^*)$ となる (系 4.10)。これは、組み紐モノイダル圏同値 $G: ({}_{D(A)}\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}, c_{\mathcal{R}}) \longrightarrow ({}_{D(A^*)}\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}, c_{\mathcal{R}'})$ は必ずしも左 $D(A^*)$-加群としての $G({}_{D(A)}D(A)) \cong {}_{D(A^*)}D(A^*)$ を与えないということである。このことは、Schrödinger 加群はモノイダル森田不変量であるが、左正則加群に比べて繊細であることを意味している。

(A, R) の Drinfel'd 元 u と 0 以上の整数 m に対して、$X \in {}_A\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}$ の $(2, q)$-トーラス絡み目次元は次式で与えられる：

$$\underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}_R X = \begin{cases} \sum \mathrm{Tr}(\underline{u^{m+1}(u^{-m})_{(1)}}_X)\mathrm{Tr}(\underline{u^{m+1}(u^{-m})_{(2)}}_X) & (q = 2m \text{ のとき}), \\ \sum \mathrm{Tr}(\underline{(u^{m+1} \otimes u^{m+1})\Delta(u^{-m})R_{21}}_{X\otimes X} \circ T_{X,X}) & (q = 2m+1 \text{ のとき}). \end{cases} \tag{4.2}$$

但し、$a \otimes b \in A \otimes A$ に対して、$\underline{a \otimes b}_{X\otimes X}$ は $a \otimes b$ の $X \otimes X$ への左作用 $x \otimes y \longmapsto (a \cdot x) \otimes (b \cdot y)$ $(x, y \in X)$ を表わす。(A, R) が半単純かつ余半単純なとき、その Drinfel'd 元 u は有限位数である [37; Lemma 3.1]。e を u の位数とすると、(4.2) より、任意の有限次元左 A-加群 X と任意の $q \in \mathbb{N}$ に対して $\underline{\boldsymbol{t}_{2,q+2e}\text{-}\widetilde{\dim}}_R X = \underline{\boldsymbol{t}_{2,q}\text{-}\widetilde{\dim}}_R X$ が成り立つことがわかる。

$X \in {}_A\mathbf{M}^{\mathrm{fd}}$ の Hopf 絡み目次元は次の公式を用いて計算することができる：

$$\underline{\mathrm{Hdim}}_R X = \sum_{i,j,k,l} \mathrm{Tr}(\underline{S^2(\beta_j)S(\beta_i)\alpha_i\alpha_k}_X)\ \mathrm{Tr}(\underline{\beta_k S(\beta_l)\alpha_l\alpha_j}_X). \tag{4.3}$$

この公式を Schrödinger 加群 ${}_{D(A)}A$ に対して適用することにより、Hopf 絡み目次元 $\underline{\mathrm{Hdim}}(A) := \underline{\mathrm{Hdim}}({}_{D(A)}A)$ に対する次の計算公式を得る。

命題 4.9 A を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数とし、$\{e_i\}_{i=1}^d$ をその基底、$\{e_i^*\}_{i=1}^d$ をその双対基底とする。このとき、

$$\underline{\mathrm{Hdim}}(A) = \sum_{m,n=1}^{d} \langle e_m^*,\ S^{-1}\big(e_m^{(1)}e_n^{(2)} \blacktriangleright S(e_m^{(3)})\big)\rangle\langle e_n^*,\ S^{-1}(e_m^{(2)}e_n^{(3)}) \blacktriangleright e_n^{(1)}\rangle \tag{4.4}$$

となる。但し、$a, c \in A$ に対して $a \blacktriangleright c = \sum a^{(2)}cS^{-1}(a^{(1)})$ とする。

(証明)

$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^d (\varepsilon_A \bowtie e_i) \otimes (e_i^* \bowtie 1_A)$ であるから、

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hdim}}(A) &= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \mathrm{Tr}(\underline{S^2(e_j^* \bowtie 1_A)S(e_i^* \bowtie 1_A)(\varepsilon_A \bowtie e_i)(\varepsilon_A \bowtie e_k)}_A) \\ &\qquad \times \mathrm{Tr}(\underline{(e_k^* \bowtie 1_A)S(e_l^* \bowtie 1_A)(\varepsilon_A \bowtie e_l)(\varepsilon_A \bowtie e_j)}_A) \\ &= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \mathrm{Tr}(\underline{S^{-2}(e_j^*)S^{-1}(e_i^*) \bowtie e_ie_k}_A)\mathrm{Tr}(\underline{e_k^*S^{-1}(e_l^*) \bowtie e_le_j}_A) \end{aligned}$$

である。ここで、$\{S(e_s)\}_{s=1}^d$ と $\{S_{A^*}^{-1}(e_s^*)\}_{s=1}^d$ は互いに双対的な基底であるから、

$$\mathrm{Tr}(\underline{(p \bowtie a)}_A) = \sum_{s=1}^{d} \langle S_{A^*}^{-1}(e_s^*p),\ a \triangleright S(e_s)\rangle \qquad (a \in A,\ p \in A^*)$$

である。したがって、

$$\underline{\mathrm{Hdim}}(A) = \sum_{j,k=1}^{d} \Big(\sum_{i,s=1}^{d} \langle S_{A^*}^{-1}(e_s^* S^{-2}(e_j^*) S^{-1}(e_i^*)),\ e_i e_k \triangleright S(e_s) \rangle \Big) \times \Big(\sum_{l,t=1}^{d} \langle S_{A^*}^{-1}(e_t^* e_k^* S^{-1}(e_l^*)),\ e_l e_j \triangleright S(e_t) \rangle \Big)$$

を得る。$a \in A$, $p \in A^*$ に対して

$$F(p,a) := \sum_{l,t=1}^{d} \langle S_{A^*}^{-1}(e_t^* p S^{-1}(e_l^*)),\ e_l a \triangleright S(e_t) \rangle$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
F(p,a) &= \sum_{l,t} \langle e_t^* p S^{-1}(e_l^*),\ S^{-1}(e_l a \triangleright S(e_t)) \rangle \\
&= \sum_{l,t} \Big\langle \sum_m \langle e_t^* p S^{-1}(e_l^*), e_m \rangle e_m^*,\ S^{-1}(e_l a \triangleright S(e_t)) \Big\rangle \\
&= \sum_{l,t,m} \langle e_t^*, e_m^{(1)} \rangle \langle p, e_m^{(2)} \rangle \langle e_l^*, S^{-1}(e_m^{(3)}) \rangle \langle e_m^*, S^{-1}(e_l a \triangleright S(e_t)) \rangle \\
&= \sum_m \langle p, e_m^{(2)} \rangle \langle e_m^*,\ S^{-1}(S^{-1}(e_m^{(3)}) a \triangleright S(e_m^{(1)})) \rangle \\
&= \sum_m \langle p, e_m^{(2)} \rangle \Big\langle e_m^*,\ S^{-1}\Big(\big(S^{-1}(e_m^{(3)}) a\big)^{(1)} S(e_m^{(1)}) S\big((S^{-1}(e_m^{(3)}) a)^{(2)} \big) \Big) \Big\rangle \\
&= \sum_m \langle p, e_m^{(2)} \rangle \Big\langle e_m^*,\ \big(S^{-1}(e_m^{(3)}) a\big)^{(2)} e_m^{(1)} S^{-1}\big((S^{-1}(e_m^{(3)}) a)^{(1)} \big) \Big\rangle \\
&= \sum_m \langle p, e_m^{(2)} \rangle \langle e_m^*,\ S^{-1}(e_m^{(3)}) a \blacktriangleright e_m^{(1)} \rangle
\end{aligned}$$

と書ける。これより、

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hdim}}(A) &= \sum_{j,k=1}^{d} F(S^{-2}(e_j^*), e_k) F(e_k^*, e_j) \\
&= \sum_{j,k,m,n=1}^{d} \langle S^{-2}(e_j^*), e_m^{(2)} \rangle \langle e_m^*,\ S^{-1}(e_m^{(3)}) e_k \blacktriangleright e_m^{(1)} \rangle \langle e_k^*, e_n^{(2)} \rangle \langle e_n^*,\ S^{-1}(e_n^{(3)}) e_j \blacktriangleright e_n^{(1)} \rangle \\
&= \sum_{m,n=1}^{d} \langle e_m^*,\ S^{-1}(e_m^{(3)}) e_n^{(2)} \blacktriangleright e_m^{(1)} \rangle \langle e_n^*,\ S^{-1}(e_n^{(3)}) S^{-2}(e_m^{(2)}) \blacktriangleright e_n^{(1)} \rangle
\end{aligned}$$

を得る。上記の値は双対基底の選び方によらないので、基底 $\{e_m\}_{m=1}^d$, $\{e_m^*\}_{m=1}^d$ の代わりに基底 $\{S(e_m)\}_{m=1}^d$, $\{S^{-1}(e_m^*)\}_{m=1}^d$ をそれぞれ用いて表現し直せば命題の公式が得られる。 □

系 4.10 G を有限群とする。群 Hopf 代数 $\boldsymbol{k}[G]$ およびその双対 Hopf 代数 $\boldsymbol{k}[G]^*$ の Drinfel'd 二重化上の Schrödinger 加群の Hopf 絡み目次元はそれぞれ次で与えられる：

$$\underline{\mathrm{Hdim}}(\boldsymbol{k}[G]) = \sharp\{\, (g,h) \in G \times G \mid gh = hg \,\} = \sum_{g \in G} |Z(g)|, \tag{4.5}$$

$$\underline{\mathrm{Hdim}}(\boldsymbol{k}[G]^*) = |G|^2. \tag{4.6}$$

但し、$Z(g) = \{\, h \in G \mid gh = hg \,\}$ (g の中心化群) である。

注意 4.11 2つの有限群 G, G' に対して $\boldsymbol{k}[G]$ と $\boldsymbol{k}[G']$ が $\boldsymbol{k}$-線形モノイダル森田同値であるとき、$\boldsymbol{k}$-isocategorical と呼ばれる [8]。定理 4.3 と上の系の (1) より、G の中の可換な元の組の個数は有限群 G の $\boldsymbol{k}$-isocategorical 不変量であることがわかる。同種の不変量は [31; Lemma 4.7] や [24; Propositions 3.2&7.2] において発見されている。

群 Hopf 代数やその双対 Hopf 代数以外の Hopf 代数に対する計算例を紹介しよう。

(1) Kac-Paljutkin 型代数 [22, 33, 34]

$N \geq 1$ を奇数、$L \geq 2$ を整数とし、有限群

$$G_{NL} = \langle\, g,\ t,\ w \mid t^2 = g^N = w^{2L} = 1,\ tw = w^{-1}t,\ gt = tg,\ gw = wg \,\rangle$$

を考える。この群は位数 $4L$ の二面体群 D_{4L} と位数 N の巡回群 C_N の直積である。群 G_{NL} の群代数 $\boldsymbol{k}[G_{NL}]$ に Hopf 代数構造を以下のように定義することができる：

$$\begin{aligned}
&\Delta(g) = g \otimes g, && \Delta(w) = w \otimes e_0 w + w^{-1} \otimes e_1 w, && \Delta(t) = t \otimes e_0 t + w^{L+1} t \otimes e_1 t,\\
&\varepsilon(g) = 1, && \varepsilon(w) = 1, && \varepsilon(t) = 1,\\
&S(g) = g^{-1}, && S(w) = e_0 w^{-1} + e_1 w, && S(t) = (e_0 - e_1 w)t.
\end{aligned}$$

但し、$e_0 = \frac{1+w^L}{2}$, $e_1 = \frac{1-w^L}{2}$ であり、これらは $\boldsymbol{k}[G_{NL}]$ の中心に属している。上記の Hopf 代数構造を持つ $\boldsymbol{k}[G_{NL}]$ を A_{NL} で表わすことにする。A_{NL} は鈴木智支氏によって導入された余半単純 Hopf 代数の族 $A_{NL}^{\nu\lambda}$ ($N \geq 1$, $L \geq 2$ は整数、$\nu, \lambda = \pm$) において N が奇数、$\nu = +$ で、$(L, \lambda) = (\mathrm{odd}, +)$, $(\mathrm{even}, -)$ のときに相当する。命題 4.9 の公式を用いて計算することにより、

$$\underline{\mathrm{Hdim}}(A_{NL}) = \underline{\mathrm{Hdim}}(\boldsymbol{k}[G_{NL}]) = 4L(L+3)N^2 \tag{4.7}$$

がわかる。しかし、L が偶数のとき、[37] において、A_{NL} と $\boldsymbol{k}[G_{NL}]$ はモノイダル森田同値でないことが多項式不変量を用いて証明されている ([38; Corollary 3.4] も参照)。

(2) 8 次元 Hopf 代数 [21, 22, 32, 39]

標数 0 の代数閉体上で定義された 11 次元以下の Hopf 代数については同型の下での完全な分類結果が知られている。そのうち、8 次元の半単純なものは群 Hopf 代数とその双対 Hopf 代数以外に、同型を除いて 1 個だけ存在し、それは Kac-Paljutkin 代数 A_{12} である [21, 22]。よって、(1) の結果から $\underline{\mathrm{Hdim}}(A_{12}) = 40$ である。8 次元の半単純でない Hopf 代数の同型類は全部で 6 個ある [32, 39]。現在、Stefan の記号で A_{C_2} 以外については計算されており、すべて $\underline{\mathrm{Hdim}}(A) = 0$ となることがわかっている。

体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限次元 Hopf 代数 A, B がモノイダル森田同値ならば、[29; Cor. 5.9] により、それらは代数として同型である ([4; Proposition 2.4] も参照)。そこで、次の問いを提案したい。

問. Hopf 代数 A の Drinfel'd 二重化の Schrödinger 加群の Hopf 絡み目次元は、A の代数構造のみによって決まるか。

References

[1] E.ABE, *Hopf Algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980 (original Japanese version published by Iwanami Shoten, Tokyo, 1977).

[2] N.ANDRUSKIEWITSCH, P.ETINGOF AND S.GELAKI, *Triangular Hopf algebras with the Chevalley property*, Michigan Math. J. **49** (2001), 277–298.

[3] D.BULACU AND B.TORRECILLAS, *The representation-theoretic rank of double of quasi-Hopf algebras*, J. Pure and Appl. Algebra **212** (2008), 919–940.

[4] C.CIBILS, *The projective class ring of basic and split Hopf algebras*, K-Theory **17** (1999), 385–393.

[5] Y.DOI, *Braided bialgebras and quadratic bialgebras*, Commun. Algebra **21** (1993), 1731–1749.

[6] 土井幸雄, 竹内光弘, Hopf 代数のコサイクル変形, 数理解析研究所講究録 **942** (1996), 29–52.

[7] V.G.DRINFEL'D, *Quantum groups*, In Proceedings of the International Congress of Mathematics, Berkeley, CA., 1987, 798–820.

[8] P.ETINGOF AND S.GELAKI, *Isocategorical groups*, Internat. Math. Res. Notices (2001), no.2, 59–76.

[9] X.FANG, *Quantum groups, q-Boson algebras and quantized Weyl algebras*, International. J. Math. **22** (2011), 675–694.

[10] J.HU AND Y.ZHANG, *The β-character algebra and a commuting pair in Hopf algebras*, Algebra Represent. Theory **10** (2007), 497–516.

[11] A.JOYAL AND R.STREET, *Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **71** (1991), 43–51.

[12] C.KASSEL, *Quantum Groups*, G.T.M. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[13] L.A.LAMBE AND D.E.RADFORD, *Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation*, J. Algebra **154** (1993), 228–288.

[14] R.LARSON AND D.E.RADFORD, *Semisimple cosemisimple Hopf algebras*, Amer. J. Math. **110** (1988), 187–195.

[15] R.LARSON AND D.E.RADFORD, *Finite dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic* 0 *are semisimple*, J. Algebra **117** (1988), 267–289.

[16] S.MACLANE, *Categories for the working mathematician*, G.T.M. 5, Springer-Verlag, New York, 1971.

[17] S.MAJID, *Representation-theoretic rank and double Hopf algebras*, Commun. Algebra **18** (1990), 3705–3712.

[18] S.MAJID, *Representations, duals and quantum doubles of monoidal categories*, Rend. Circ. Math. Palermo (2) Supp. **26** (1991), 197–206.

[19] S.MAJID, *Double quasitriangular Hopf algebras*, Commun. Algebra **19** (1991), 3061–3073.

[20] S.MAJID, *Foundations of quantum group theory*, Cambridge University Press, 1995.

[21] A.MASUOKA, *Semisimple Hopf algebras of dimension* 6, 8, Israel J. Math. **92** (1995), 361–373.

[22] A.MASUOKA, *Cocycle deformations and Galois objects for some cosemisimple Hopf algebras of finite dimension*, Contemp. Math. **267** (2000), 195–214.

[23] S.MONTGOMERY, *Hopf algebras and their actions on rings*, C.B.M.S. **82**, American Mathematical Society, 1993.

[24] S.-H.NG AND P.SCHAUENBURG, *Central invariants and higher indicators for semisimple quasi-Hopf algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 1839–1860.

[25] D.E.RADFORD, *Minimal quasitriangular Hopf algebras*, J. Algebra **157** (1993), 285–315.

[26] D.E.RADFORD, *On oriented quantum algebras derived from representations of the quantum double of a finite-dimensional Hopf algebras*, J. Algebra **270** (2003), 670–695.

[27] D.E.RADFORD AND J.TOWBER, *Yetter-Drinfel'd categories associated to an arbitrary bialgebra*, J. Pure Appl. Algebra **87** (1993), 259–279.

[28] N.Y.RESHETIKHIN AND V.G.TURAEV, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.

[29] P.SCHAUENBURG, *Hopf bigalois extenstions*, Commun. Algebra **24** (1996), 3797–3825.

[30] P.SCHAUENBURG, *Hopf bimodules over Hopf-Galois extensions, Miyashita-Ulbrich actions, and monoidal center constructions*, Commun. Algebra **24** (1996), 143–163.

[31] K.SHIMIZU, *Monoidal Morita invariants for finite group algebras*, J. Algebra **323** (2010), 397–418.

[32] D.STEFAN, *Hopf algebras of low dimension*, J. Algebra **211** (1999), 343–361.

[33] 鈴木智支, ある種の有限次元半単純 Hopf 代数の構成, 数理解析研究所講究録 **997** (1997), 150–165.

[34] S.SUZUKI, *A family of braided cosemisimple Hopf algebras of finite dimension*, Tsukuba J. Math. **22** (1998), 1–29.

[35] M.E.SWEEDLER, *Hopf algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[36] M.TAKEUCHI, *Survey of braided Hopf algebras*, Contemp. Math. **267** (2000), 301–323.

[37] M.WAKUI, *Polynomial invariants for a semisimple and cosemisimple Hopf algebra of finite dimension*, J. Pure and Appl. Algebra **214** (2010), 701–728.

[38] M.WAKUI, *Triangular structures of Hopf algebras and tensor Morita equivalences*, Rev. Un. Mat. Argentina **51** (2010), 193–210.

[39] R.WILLIAMS, Ph.D. thesis, Florida State University, 1988 (unpublished).

[40] D.N.YETTER, *Quantum groups and representaions of monoidal categories*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **108** (1900), 261–290.

Department of Mathematics, Faculty of Engineering Science
Kansai University
3-3-35 Yamate-cho, Suita-shi, Osaka 564-8680, Japan
e-mail:wakui@kansai-u.ac.jp